QUAND PRESCRIRE LE PROCESSUS CONNECTER NE SUFFIT PAS : LE CAS DE π DANS DES RESSOURCES COSTARICIENNES

Segura-Corella Norma[1]

[1]Laboratoire en Didactique André Revuz, Université Paris Cité, France ;
Centre de Recherche en Mathématiques et en Métamathematiques, Université de Costa Rica, Costa Rica ; nseguracorella@gmail.com

I. UNE QUESTION QUI SE TRANSFORME

Dans le programme costaricien de mathématiques (MEP, 2012) connecter figure parmi les cinq processus mathématiques prescrits (formuler et résoudre des problèmes, raisonner et argumenter, représenter, communiquer et connecter). Le MEP (2012) désigne la possibilité de développer des liens à l'intérieur d'un même domaine mathématique, entre différents domaines, ainsi qu'avec d'autres disciplines. Cette prescription est explicite et transversale, elle apparaît dans les orientations générales du programme et dans les indications ponctuelles accompagnant chaque contenu. Toutefois, l'analyse du système éducatif costaricien révèle qu'elle reste absente des pratiques ordinaires, ce qui constitue le point de départ de cette recherche.

La construction du questionnement dans notre thèse s'est opérée progressivement, au fil des travaux. L'étude du contexte éducatif costaricien et l'identification de connecter comme processus à la fois prescrit et absent des pratiques ordinaires nous ont conduit à formuler une première question : *Dans quelles conditions vit le processus connecter lorsque les élèves étudient un concept mathématique au Costa Rica ?* L'état de l'art sur les connexions mathématiques a ensuite permis de préciser la nature de l'objet étudié. Les travaux existants montrent que les connexions mathématiques peuvent être pensées comme des relations entre objets mathématiques (Businskas, 2008 ; De Gamboa, Caviedes et Badillo, 2022), ou comme des activités de mise en relation en situation (Businskas, 2008 ; Dolores-Flores et García-García, 2017 ; García-García, 2018). Cette distinction a conduit à préciser les moments constitutifs du processus dans une deuxième formulation : *Dans quelles conditions vit le processus connecter, en termes d'émergence, de développement et de stabilisation, lorsque les élèves étudient un concept mathématique au Costa Rica ?*

Cette deuxième formulation permettait de ne plus réduire connecter à la présence ou à l'absence de connexions, mais de le considérer comme un processus susceptible d'apparaître, de se développer et de se stabiliser dans le travail mathématique. Elle présentait néanmoins des limites que la construction du cadre théorique a permis de dépasser : le terme conditions désignait indistinctement des dimensions institutionnelles, didactiques, cognitives ou sémiotiques et la formulation restait centrée sur le travail des élèves, ignorant que connecter est prescrit par l'institution, organisé par les tâches et les ressources, puis produit ou transformé dans les pratiques ordinaires. La théorie des ETM a fourni un langage plus précis pour répondre à ces limites, ce qui détermine la vie du processus connecter est l'articulation entre le plan épistémologique et le plan cognitif, à travers les genèses sémiotique, instrumentale et discursive (Kuzniak, 2022 ; Kuzniak, Nechache & Richard, 2022). Il s'agit désormais d'analyser comment le travail prescrit organise ou n'organise pas les conditions pour qu'une mise en relation entre objets, grandeurs, représentations ou domaines devienne opératoire dans le travail mathématique. La question de recherche devient ainsi : *Comment le processus connecter se manifeste-t-il et se transforme-t-il aux niveaux de référence, idoine et personnel de l'ETM dans l'enseignement et l'apprentissage des Nombres et de la Géométrie au Costa Rica ?*

Dans cette communication, nous l'examinons dans l'ETM de référence et idoine à partir d'un cas : l'introduction de π et de l'aire du cercle en sixième année (11–12 ans) dans le curriculum costaricien. Le choix de ce cas n'est pas arbitraire, ni du point de vue curriculaire ni du point de vue mathématique. D'une part, les travaux de Douady (1986), Douady et Perrin-Glorian (1987) et Montoya-Delgadillo et Vivier (2014) ont montré que l'articulation entre Nombres et Géométrie constitue un mécanisme structurellement nécessaire pour accéder à certains objets et produire certaines formes de généralisation. D'autre part, π est simultanément un nombre, un rapport entre grandeurs et une propriété géométrique des cercles, ce qui en fait précisément un objet où cette articulation est constitutive. Interroger ce cas, c'est donc interroger la nature même de la connexion entre Nombres et Géométrie.

II. CADRE ET INSTRUMENT D'ANALYSE

Kuzniak (2022) définit le travail mathématique comme un travail intellectuel de production articulant un plan épistémologique (les objets, les artefacts et le référentiel théorique du domaine) et un plan cognitif (les processus et procédures mobilisés par les sujets dans l'activité effective), à travers des genèses sémiotique, instrumentale et discursive (Kuzniak, Nechache et Richard, 2022). Dans ce cadre, nous distinguons la connexion comme objet relationnel, une relation entre entités du travail mathématique identifiable et descriptible dans le savoir scolaire, et connecter comme processus, la dynamique par laquelle ces relations émergent, sont travaillées et se stabilisent dans l'activité à travers la circulation de ces genèses. La théorie des ETM distingue trois niveaux. L'ETM de référence définit les connexions attendues et légitimées par l'institution. L'ETM idoine organise les conditions didactiques par lesquelles ces relations sont proposées et travaillées. L'ETM personnel décrit les mises en relation effectivement produites par les sujets. Dans cette communication, l'analyse se limite aux deux premiers niveaux, à partir du programme et des manuels scolaires du Costa Rica.

Pour les analyser, nous avons construit un instrument en trois niveaux. Les activations consistent en un inventaire neutre des entités convoquées par la tâche : objets du référentiel, systèmes sémiotiques, artefacts, domaines. Les relations identifient la configuration génétique dans laquelle s'inscrivent les articulations entre entités : genèse sémiotique, instrumentale, discursive, ou leur articulation dans les plans [Sem–Ins], [Ins–Dis] ou [Sem–Dis]. La synthèse produit un diagnostic : qu'est-ce que la tâche organise, ou n'organise pas, pour que les mises en relation émergent, dans quelle mesure le travail s'ancre-t-il dans le référentiel théorique, et dans quel paradigme se développe-t-il ? Pour les manuels, une rubrique supplémentaire interroge la relation à la prescription curriculaire : l'extrait reprend-il, amplifie-t-il ou ignore-t-il ce que le programme prescrit ?

III. π : UN OBJECT CONNECTEUR

π occupe une position épistémologique singulière, il est un nombre, un rapport entre grandeurs et un invariant de similitude de toutes les circonférences, il est un objet dont l'accès mathématique exige une articulation entre Nombres et Géométrie qui est constitutive. Les contenus relatifs à la circonférence et au cercle font leur entrée en sixième année dans le domaine de la Géométrie, avec des habiletés prescrites allant de l'estimation de la mesure de la circonférence à l'identification de π comme rapport C/d, jusqu'au calcul de l'aire du cercle (MEP, 2012). Cette prescription est transposée dans deux manuels largement utilisés au Costa Rica : Santillana et Libros para todos. Dans les trois cas, Nombres et Géométrie sont co-activés et π est présent. Néanmoins, la nature du travail organisé autour de ces relations diffère fortement. C'est précisément ce que notre instrument d'analyse permet de caractériser, il ne s’agit pas seulement d’identifier la présence de connexions, mais d’analyser ce que chaque ressource organise pour qu’elles deviennent, ou non, des relations mathématiquement opératoires dans le travail.

Le programme du Costa Rica prescrit une activité avec des rubans de papier et des objets cylindriques. Les élèves matérialisent la longueur de la circonférence par superposition, puis comparent cette longueur à celle du diamètre afin de faire émerger une régularité empirique. Une systématisation de π et de la formule est ensuite prévue lors de la clôture. Le niveau des activations confirme la richesse de l’extrait : circonférence, diamètre, rapport, approximation et domaines numérique et géométrique sont présents. L’analyse des relations montre que les mises en rapport organisées, entre l’objet matériel et la circonférence comme grandeur mesurable, puis entre la longueur de la circonférence et celle du diamètre, s’inscrivent principalement dans le plan [Sem–Ins]. Le passage de la régularité empirique à π comme invariant universel n’est pas organisé par la tâche, ce qui laisse la genèse discursive sans appui dans le travail prescrit. La propriété géométrique qui garantit la constance du rapport, la similitude universelle des circonférences, n’est ni appelée ni rendue visible. La systématisation est ainsi largement déléguée à l’enseignant.

Les deux manuels transposent cette même prescription de manière radicalement différente. Santillana (2019) formalise les deux formules $C = \pi d$ et $C = 2\pi r$ avec le même confinement paradigmatique que dans le programme : π arrive comme coefficient opératoire à partir d’un seul cas numérique, la généralisation n’est pas construite par les élèves, la similitude universelle des circonférences demeure absente, et la genèse discursive s’arrête à l’énoncé du résultat sans en organiser la justification. Ce manuel institutionnalise ce que le programme délègue à l’enseignant, sans modifier la structure du travail mathématique. Libros para todos (2017) organise un travail qualitativement différent. La variation porte sur trois circonférences de tailles distinctes, dont une construite par l’élève au compas. Un tableau prescrit explicitement de calculer le rapport C/d pour chaque cas. La question « ¿cuál es la relación entre las medidas de las aproximaciones obtenidas? [quel est le rapport entre les mesures des approximations obtenues ?] » (Libros para todos, 2017, p. 35) convoque une genèse discursive significative, l’élève doit formuler la régularité à partir des trois cas. Le travail circule dans le plan [Sem–Dis], appuyé sur la genèse instrumentale des mesures précédentes.

Le programme MEP (2012) et Santillana (2019) organisent un travail qui reste confiné dans le plan [Sem–Ins], sans que la genèse discursive soit véritablement prise en charge par la tâche. Libros para todos (2017) crée en revanche des conditions pour que le processus connecter soit organisé par la tâche elle-même. Cette prise en charge reste cependant ancrée dans GI, en travaillant sur trois circonférences de tailles distinctes, la tâche crée les conditions pour que la régularité soit perçue comme générale et non comme un résultat local. Toutefois, la similitude universelle des circonférences, qui fonderait cette constance indépendamment de tout cas particulier, n’est pas convoquée. Ce confinement en GI est cohérent avec le paradigme dans lequel s’inscrit le travail géométrique attendu en sixième année au Costa Rica, conformément aux attentes curriculaires pour ce niveau.

IV. CE QUE Π REVELE DU PROCESSUS CONNECTER

Le cas de π montre que la transformation de la question n’est pas seulement un ajustement de formulation, mais une condition pour rendre le phénomène étudiable. Tant que connecter est abordé comme une connexion déjà donnée entre Nombres et Géométrie, l’analyse risque de s’arrêter au constat que π, les grandeurs et les formules sont présents dans les ressources. L’entrée par le travail mathématique révèle que le même objet peut prendre des statuts didactiques différents : coefficient opératoire à appliquer, régularité empirique à constater, rapport à formuler, ou invariant géométrique dont le fondement reste à construire. Ainsi, l'enjeu n'est pas de décider si le programme ou les manuels « connectent » ou non, mais de caractériser ce qu'ils font vivre du processus connecter : les genèses qu'ils mobilisent, celles qu'ils laissent à la charge de l'enseignant, et les formes de circulation ou de confinement qu'ils rendent possibles.

Elle confirme également que l'articulation entre Nombres et Géométrie n'est pas un passage facultatif, mais un mécanisme constitutif du travail mathématique sur certains objets, comme l'ont montré les travaux de Douady (1984), Douady et Perrin-Glorian (1986), ainsi que Montoya-Delgadillo et Vivier (2011). C'est en ce sens que l'instrument proposé ne se réduit pas à un outil de codage : il est la condition analytique qui rend visible ce que la question initiale ne pouvait pas formuler.

REFERENCES

Businskas, A. (2008). *Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections* [Doctoral dissertation, Simon Fraser University].

De Gamboa, G., Caviedes, S., et Badillo, E. (2022). Mathematical connections and the mathematics teacher's specialised knowledge. *Mathematics, 10*(21), Article 4010. https://doi.org/10.3390/math10214010

Dolores-Flores, C., et García-García, J. (2017). Conexiones intra-matemáticas y extra-matemáticas que se producen al resolver problemas de cálculo en contexto: un estudio de casos en el nivel superior. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 31*(57), 158–180. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a08

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 5–31.

Douady, R., et Perrin-Glorian, M.J. (1987). *Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane* (Cahier de didactique des mathématiques, n° 37). IREM de Paris.

Kuzniak, A. (2022). The theory of Mathematical Working Spaces—Theoretical characteristics. Dans A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo, et P. R. Richard (dir.), *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (pp. 3–31). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_1

Kuzniak, A., Nechache, A., et Richard, P. R. (2022). The theory of Mathematical Working Spaces in brief. Dans A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo, et P. R. Richard (dir.), *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (pp. 57–69). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_3

Libros para todos. (2017). *Matemáticas 6°*. San José, Editorial Libros para todos.

Ministerio de Educación Pública. (2012). *Programas de Estudio de Matemáticas. I y II Ciclo de la Educación Primaria, III Ciclo de Educación General Básica y Educación Diversificada*. Ministerio de Educación Pública de Costa Rica.

Montoya-Delgadillo, E., et Vivier, L. (2014). Les changements de domaine dans le cadre des Espaces de Travail Mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 19*, 73–101.

Santillana. (2019). *Matemáticas 6°*. San José, Editorial Santillana.