

# TRAJECTOIRE D'UNE QUESTION : GENÈSE ET RECONFIGURATION DIDACTIQUE D'UN QUESTIONNEMENT SUR LES NOMBRES RÉELS

Safia Bennabi<sup>1</sup>

<sup>1</sup>DIDACTIfen, LADIMath, Université de Liège, Belgique ; [S.Bennabi@uliege.be](mailto:S.Bennabi@uliege.be)

## I UNE QUESTION NÉE D'UN MALAISE

Cette contribution s'inscrit dans une recherche doctorale consacrée à l'introduction des nombres réels dans l'enseignement belge francophone. Elle prend appui sur une interrogation issue de l'enseignement en première année de bachelier en mathématiques (niveau L1). Dans ce contexte, l'analyse apparaît de manière récurrente comme la branche la plus difficile du cursus. Ce constat trouve écho au-delà de l'expérience subjective par les taux d'échec, significativement plus élevés que dans d'autres unités d'enseignement (algèbre linéaire, géométrie, etc.), ainsi que par une concentration plus forte d'abandons, de reports et de redoublements. Ce phénomène s'inscrit dans une problématique bien documentée de la transition secondaire-supérieur, marquée par des ruptures épistémologiques et institutionnelles. L'analyse y est régulièrement identifiée comme un lieu de tensions majeures.

La question initiale était formulée en ces termes : « Pourquoi, dans le curriculum mathématique, l'analyse est-elle si difficile à la transition secondaire-supérieur ? ». Cette formulation large, comparative et peu spécifiée mobilise des catégories non problématisées (difficulté, abstraction, maturité) et relève davantage d'un étonnement professionnel que d'une interrogation scientifique.

Dans la perspective de la Théorie Anthropologique (TAD) de Chevallard (1999, 2002), on peut interpréter cette première formulation comme située à un échelon périphérique de l'échelle de codétermination (Figure 1) : elle interroge un phénomène institutionnel global (la difficulté relative d'un cours), sans proximité identifiée avec un savoir mathématique déterminé ni avec les conditions de sa transposition ou de ses conditions de diffusion et de circulation au sens de Brousseau (1998).

HUMANITY ↔ CIVILISATIONS ↔ SOCIETIES ↔ SCHOOLS ↔ PEDAGOGIES ↔ DISCIPLINE ↔ DOMAIN ↔ SECTOR ↔ THEME ↔ QUESTION

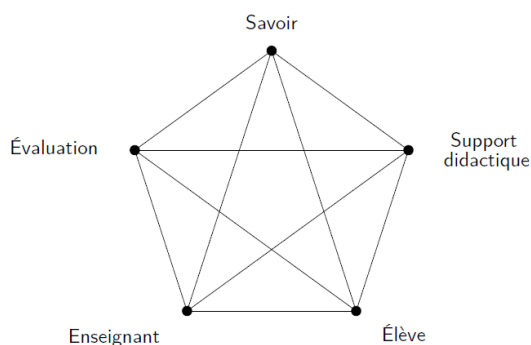
### *Figure 1 – Échelle des niveaux de codétermination didactique*

Comme le souligne Robert (1992, p.39), « toutes les questions que l'on peut se poser à propos de l'enseignement [...] ne sont pas immédiatement accessibles à une recherche didactique ». Elles doivent être formulées au sein d'un cadre de référence explicite ; ce que l'on appelle cadre théorique.

## II LE TRAVAIL DE RECONFIGURATION : LE RÔLE DES CADRES THÉORIQUES

L'interrogation initiale – naïve et périphérique – s'est d'abord déployée selon une exploration heuristique à entrées multiples, assumée comme telle. Dans une perspective proche de celle défendue par Feyerabend (1975), il ne s'agissait pas de circonscrire a priori un cadre d'analyse, mais de laisser la question appeler progressivement les outils nécessaires à son

élucidation. Cette démarche a conduit à identifier plusieurs pôles structurant le problème — savoirs en jeu, pratiques d'évaluation, supports institutionnels – dont l'articulation ne peut être réduite au seul triangle didactique. L'élaboration d'un graphe « complet » de la didactique (Figure 2), intégrant explicitement ces dimensions, constitue dès lors un instrument heuristique permettant de rendre compte de la circulation entre cadres théoriques et des dépendances internes au système étudié.



**Figure 2** – Graphe « complet » de la didactique

Dans ce contexte, l'analyse des productions étudiantes en situation d'évaluation apparaît comme un point d'entrée privilégié pour accéder aux connaissances effectivement mobilisées. En mobilisant conjointement la théorie des situations didactiques (TSD) de Brousseau (1998) et les apports de Vergnaud (1990) sur la théorie des champs conceptuels, il a été possible d'identifier un ensemble de contenus mathématiques dont les carences se cristallisent autour des propriétés structurelles des nombres réels – notamment leur dimension topologique –, souvent implicites dans les pratiques mais déterminantes pour la validité des raisonnements. Dès lors, la question initiale se trouve progressivement reformulée : il ne s'agit plus d'expliquer une difficulté locale, mais de comprendre les conditions de possibilité didactiques, épistémologiques et anthropologiques de l'appropriation de ces savoirs.

Les dimensions anthropologique et épistémologique émergent naturellement et simultanément de la question naïve, sans hiérarchie ni succession imposée. La TAD s'impose d'emblée en raison du positionnement initial de la question, centrée sur une transition entre institutions distinctes (secondaire et universitaire) : ce cadre, attaché aux rapports institutionnels, offre un potentiel analytique pour examiner les transpositions didactiques, qui révèlent des manquements épistémologiques ou des paradigmes mathématiques différenciés. Quelles praxéologies relatives aux nombres réels sont disponibles dans l'enseignement secondaire, et dans quelles conditions leurs propriétés de complétude et de continuité deviennent-elles nécessaires ?

Parallèlement, la dimension épistémologique, inspirée de Bachelard (1938) sur les obstacles, interroge la justification épistémologique des réels dans des problèmes de continuité et de complétude. Brousseau (1998) renforce ce lien épistémologique via la TSD : les situations fondamentales rendent le savoir nécessaire et révèlent les obstacles comme didactiques (non travaillés institutionnellement), comme le montrent les recours à l'évidence perceptive ou à l'ostension dans les copies d'examen, indiquant une absence de schèmes opératoires liés à la complétude.

Ces cadres théoriques forment un réseau théorique interconnecté, au sens du *networking* proposé par Bikner-Ahsbabs et Prediger (2014), et repris par Artigue (2020) pour analyser les dialogues entre théories. Ce réseau intègre également le cadre évaluatif de Sayac (2019), explicitement ancré dans la TAD. Ainsi articulés, ces outils théoriques font dialoguer les échelons de codétermination (Figure 1) : du périphérique (discours global sur la difficulté

perçue en analyse) au disciplinaire (spécificité de l'analyse), praxéologique (tâches mobilisant la topologie) et didactique (conditions d'accessibilité d'un savoir spécifique) circonscrivant ainsi une question vague à un niveau proximal de la discipline mathématique.

Ce dialogue transforme la question initiale par un processus dialectique : elle appelle les cadres, qui en retour la reconfigurent. Elle accède alors à un statut didactique. La reformulation devient opératoire : « Quelles conditions institutionnelles rendent (in)visibles la raison d'être topologique des nombres réels dans l'enseignement obligatoire et comment cela contribue-t-il aux difficultés rencontrées en analyse en début de cursus universitaire? » Le passage d'une question périphérique à une question scientifiquement exploitable repose sur un double mouvement : une circonscription progressive, qui en précise les contours pour les besoins de la thèse, et une instrumentation théorique, où les cadres sont mobilisés, ajustés et prolongés (notamment par une dimension épistémologique forte dans l'analyse évaluative). La « scientification » de la question ne consiste pas à appliquer un cadre préexistant, mais à l'inscrire dans ce réseau cohérent, la rendant analysable, discutable et cumulable.

### III QUAND LA QUESTION AGIT SUR LA THÉORIE

Le processus de reconfiguration ne consiste pas seulement à faire descendre progressivement la question vers des niveaux plus proximaux du savoir, comme l'illustre la mobilisation de l'échelle de codétermination (Chevallard, 1999, 2002). L'analyse empirique exerce également un effet en retour sur les outils théoriques mobilisés. Autrement dit, la question de recherche ne se contente pas d'être éclairée par les cadres existants : elle contribue aussi à les éprouver, à les préciser et parfois à les prolonger. Cette relation dialectique entre question et théorie constitue une dimension centrale du travail de conceptualisation en didactique des mathématiques.

Plusieurs travaux récents soulignent ce caractère construit et argumentatif du cadre théorique. Comme le rappellent Hiebert et ses collègues (2023), « un cadre théorique est une « théorie sur mesure », élaborée pour soutenir les hypothèses et les questions spécifiques d'une recherche ». Il ne s'agit donc pas d'appliquer mécaniquement une théorie préexistante, mais de combiner et d'adapter des concepts issus de différentes traditions afin de rendre le phénomène étudié analysable. Dans cette perspective, la construction du cadre théorique relève d'un véritable travail de conceptualisation (Roditi, 2009), où les choix opérés — adoption, adaptation ou écartement de certains outils — participent à l'argumentation même de la recherche.

Cette dynamique peut être éclairée par les travaux portant sur les praxéologies de recherche, développés notamment dans le cadre de la TAD. Comme le montrent Artigue et Bosch (2014), les chercheurs construisent progressivement des organisations de recherche spécifiques pour rendre observable un phénomène didactique donné. Dans cette perspective, les outils théoriques jouent un rôle comparable à celui d'instruments d'observation : ils permettent de découper le réel selon certaines dimensions pertinentes pour l'analyse. Cette idée rejoint la formule de Robert (1992), selon laquelle le didacticien « découpe le réel » afin d'en rendre l'étude possible.

L'histoire de la didactique des mathématiques offre de nombreux exemples de cette dynamique. Les ingénieries didactiques, par exemple, ont émergé comme réponse méthodologique, entre autres, aux limites des approches statistiques dominantes dans l'étude des phénomènes d'enseignement-apprentissage. Elles ont introduit un principe de validation interne, fondé sur l'analyse fine de situations construites et de leur fonctionnement (Artigue, 1988). Ce type de développement illustre la manière dont les contraintes empiriques et méthodologiques rencontrées dans les recherches conduisent à la création ou à l'ajustement d'outils théoriques.

La présente recherche s'inscrit dans cette dynamique. L'analyse des productions étudiantes en situation d'évaluation, notamment dans des interactions orales autour de propriétés analytiques, a conduit à affiner certains outils d'analyse issus du cadre évaluatif proposé par Sayac (2019). Si ce cadre permet d'interroger les dimensions didactiques et professionnelles du jugement évaluatif, l'étude des raisonnements mobilisant les propriétés topologiques des nombres réels a rendu nécessaire l'introduction d'indicateurs explicitement épistémologiques, inspirés à la fois de la TAD et des travaux de Bachelard sur les obstacles épistémologiques. Cet ajustement illustre la manière dont la question de recherche agit en retour sur les instruments d'analyse : confrontés aux singularités du terrain, les cadres théoriques sont amenés à se préciser pour rendre compte de phénomènes qui n'étaient pas initialement au cœur de leur élaboration.

Ainsi, la descente le long de l'échelle de codétermination didactique engendre un enrichissement : du périphérique au didactique, une naïve « difficulté perçue » devient levier pour affiner transposition et institutionnalisation. La théorie est vivante, ajustable, nourrie par les questions.

#### IV CONCLUSION

Cette contribution illustre comment une interrogation née d'un malaise empirique – la difficulté marquée de l'analyse à la transition secondaire-supérieur – se transforme en problématique didactique opératoire. Par une suite de déplacements dans l'échelle de codétermination (Chevallard, 1999, 2002), la question initiale périphérique (discours global sur la difficulté) descend vers l'échelon disciplinaire (spécificité analytique), praxéologique (tâches mobilisant la topologie des réels), puis didactique (conditions institutionnelles de visibilité de la raison d'être topologique des nombres réels).

Réciproquement, les questions de recherche agissent comme des contraintes productives sur les cadres théoriques. Leur mise à l'épreuve dans l'analyse empirique conduit à affiner les outils disponibles afin de mieux rendre compte des phénomènes observés. On peut ainsi comprendre l'activité du didacticien comme celle d'un ingénieur conceptuel : confronté à des phénomènes difficilement observables, il élabore des instruments théoriques capables d'en révéler certaines dimensions. À l'image d'un prisme qui décompose une lumière invisible à l'œil nu, ces outils analytiques rendent perceptibles des structures autrement inaccessibles. Dans cette perspective, la transformation de la question initiale ne correspond pas seulement à un processus de circonscription progressive de l'objet étudié ; elle s'accompagne également d'un enrichissement du réseau théorique mobilisé. La relation entre question et théorie apparaît ainsi comme une dynamique dialectique, moteur central de la recherche en didactique des mathématiques.

Dans l'écriture scientifique, ces trajectoires dialectiques s'effacent au profit d'une présentation linéaire où la problématique finale semble émerger naturellement (Perrin-Glorian & Reuter, 2006). Cette reconstruction est constitutive de la production de savoirs cumulables en didactique : elle rend la question analysable, discutable et transmissible, mais au prix d'une invisibilisation de sa genèse processuelle.

Ainsi, les « questions de la didactique des mathématiques » ne sont pas données ; elles sont construites dans l'interaction dynamique entre étonnement professionnel, cadres théoriques, méthodes et terrain. Leur étude révèle que problématiser consiste en une descente contrôlée vers le savoir proximal, doublée d'un enrichissement théorique et méthodologique. Ce cas, centré sur l'appropriation topologique des réels, contribue à éclairer le thème de l'édition 2026 : explorer les questions elles-mêmes comme objets didactiques vivants et situés.

## REFERENCES

- Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 9(3), 281–308.
- Artigue, M. Méthodologies de recherche en didactique des mathématiques : Où en sommes-nous ?. *Educação Matemática Pesquisa*, 2021, Metodologia de pesquisa em Educação Matemática, 22 (3), pp.25 - 64.
- Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique: Contribution à une psychanalyse de la connaissance objective*. Librairie philosophique J. Vrin.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield, Eds.). La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221–266.
- Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. 1. Structures & fonctions. In J.-L. Dorier, A. Gagatsis, S. Houdement, & C. Soirou (Eds.), *Actes de la 11e École d'été de didactique des mathématiques* (pp. 3–22). La Pensée Sauvage.
- Feyerabend, P. (1975). *Against method: Outline of an anarchistic theory of knowledge*. New Left Books.
- Hiebert, J., Cai, J., Hwang, S., Morris, A. K., & Hohensee, C. (2023). *Doing Research: A New Researcher's Guide*. Springer International Publishing.
- Perrin-Glorian, M.-J., & Reuter, Y. (Eds.). (2006). *Les méthodes de recherche en didactiques*. Presses Universitaires du Septentrion.
- Robert, A. (1992). Problèmes méthodologiques en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 33–58.
- Roditi, E. (2009). Implicites dans l'analyse des pratiques enseignantes en didactique des mathématiques. In C. Cohen-Azria & N. Sayac. *Questionner l'implicite*, (p.147-156). Presses universitaires du Septentrion.
- Sayac, N. (2019). Approche didactique de l'évaluation et de ses pratiques en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 39(3), 283–329.
- Vergnaud, G. (1990), « La théorie des champs conceptuels », *Recherche en didactique des mathématiques*, 10, ° 2.3, , 133-170